

УДК 519.62:536.2

**ПАВЛОВ Алексей Романович**, доктор технических наук, профессор кафедры математического анализа Института математики и информатики Якутского государственного университета имени М.К. Аммосова. Почетный работник высшего профессионального образования РФ. Автор 65 научных работ, в т.ч. монографии, трех учебно-методических пособий

**МАТВЕЕВА Майя Васильевна**, аспирант кафедры математического анализа Института математики и информатики Якутского государственного университета имени М.К. Аммосова. Автор 14 научных публикаций

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МОРОЗНОГО ПУЧЕНИЯ ГРУНТА\***

Предлагается алгоритм численного исследования температурно-влажностного режима и пучения грунтов в процессе промерзания. Изучены закономерности влияния основных параметров, определяющих морозное пучение.

*Система уравнений теплопереноса, промерзание грунта, пучение грунта*

Одной из основных причин морозного пучения является увеличение объема грунта при промерзании в результате перехода воды в лед и миграции влаги к фронту промерзания [1]. Количественная оценка этих процессов аналитическими методами затруднена из-за нелинейности определяющих уравнений [2]. Расчетный метод определения морозного пучения влажных грунтов основан на исследовании совместного тепло-влажностного переноса при промерзании. В настоящей работе исследование температурно-влажностного режима грунтов с учетом фазовых превращений поровой влаги в процессе их промерзания выполнено на математической модели теплопереноса [3, 4] в случае, когда не учитываются количество тепла, переносимое миграционным потоком влаги, и термоградиентный механизм переноса влаги.

**Постановка задачи о промерзании.** Температурная задача в одномерном случае, когда пространственная координата  $x$  направлена от дневной поверхности грунта внутрь массива, состоит из следующих уравнений:

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad T > T_*, \quad \xi(t) < x < l, \quad (1)$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + L \rho \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad T < T_*, \quad 0 < x < \xi(t). \quad (2)$$

На границе раздела фаз имеет место условие типа Стефана:

$$\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = L \rho [W_* - W_1(T_*)] \frac{d\xi}{dt}, \quad T = T_*, \quad x = \xi(t). \quad (3)$$

\* Работа частично поддержана грантом имени академика В.П. Ларионова для молодых ученых, специалистов и студентов по физико-техническим наукам РС(Я) (№07-05/28 от 22.01.2008).

На дневной поверхности грунта задано условие теплообмена по закону Ньютона:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_c), \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (4)$$

а на нижней границе области – отсутствие теплового потока:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = l, \quad t > 0. \quad (5)$$

Температура по толщине грунта удовлетворяет следующему начальному условию:

$$T(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

где  $\varphi(x)$  – заданная функция.

В уравнениях (1–6) приняты следующие обозначения:  $T$  – температура;  $W$  – влажность в талой зоне;  $W_1, W_2$  – влажности по жидкой и твердой фазам в мерзлой зоне соответственно;  $T_*$  – температура фазового перехода;  $c_1, \rho_1, \lambda_1$  – соответственно удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности талой зоны;  $c_2, \rho_2, \lambda_2$  – те же величины в мерзлой зоне;  $\rho$  – плотность скелета (сухого) материала;  $L$  – удельная теплота кристаллизации воды (плавления льда);  $W_* = W(T_*)$  – значения влажности на фронте со стороны талой зоны;  $W_1(T_*)$  – такая же величина со стороны мерзлой зоны;  $\alpha$  – коэффициент теплопередачи,  $T_c$  – температура окружающей среды;  $x = \xi(t)$  – уравнение фронта фазового перехода.

Влажностная задача ставится с учетом миграции влаги, как в талой, так и мерзлой областях:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_1 \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \xi(t) < x < l, \quad T > T_*, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_2 \frac{\partial W_1}{\partial x} \right), \quad 0 < x < \xi(t), \quad T < T_*. \quad (8)$$

Уравнение баланса массы на фазовой границе можно записать в виде

$$k_2 \frac{\partial W_1}{\partial x} - k_1 \frac{\partial W}{\partial x} = W_2(T_*) \frac{d\xi}{dt}. \quad (9)$$

Граничные условия влажности записываются в зависимости от фазового состояния границы. В талом состоянии всей границы грунта задаются условия:

$$k_1 \frac{\partial W}{\partial x} = \alpha_*(W - \psi), \quad x = 0, \quad T > T_*, \quad (10)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x = l, \quad T > T_*. \quad (11)$$

Для мерзлых границ указанные условия принимают следующий вид:

$$k_2 \frac{\partial W_1}{\partial x} = \alpha_*(W_1 - \psi), \quad x = 0, \quad T \leq T_*, \quad (12)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = 0, \quad x = l, \quad T \leq T_*. \quad (13)$$

Начальное распределение влаги во всей области известно:

$$W(x, 0) = \varphi_*(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (14)$$

В уравнениях (7–14) приняты следующие обозначения:  $W_1(T)$  – известная функция, выражающая количество незамерзшей воды при температуре  $T$ ;  $W_2(T)$  – льдосодержание (количество льда);  $\bar{W} = W_1 + W_2$  – суммарная влажность в мерзлой зоне;  $W$  – влажность в талой зоне;  $\psi(x)$  – равновесная с окружающей средой влажность материала;  $\alpha_*$  – коэффициент влагообмена;  $k_1, k_2$  – коэффициенты диффузии влаги соответственно в талой и мерзлой зонах;  $W_2(T_*) = W_* - W_1(T_*)$  – свободная влага (вода), которая замерзает скачком на фронте фазового перехода.

Уравнениями (1–14) полностью описываются температурное и влажностное поля при выбранных граничных условиях. Разработанный алгоритм численного решения указанной задачи подробно изложен в работе [5].

**Алгоритм определения морозного пучения.** Морозное пучение является результатом увеличения объема поровой воды при ее переходе в лед. В процессе промерзания происходит перераспределение влаги путем ее миграции, которое при определенных условиях может привести к пучению и образованию внутри промерзшего слоя прослоек льда различной мощности.

В настоящей работе предлагается методика численного моделирования морозного пучения грунтов, основанная на результатах численного решения задачи тепловлагодиффузионного переноса в промерзающих грунтах. Методика позволяет проследить за динамикой полей температуры, влажности и пучения в процессе промерзания.

Вывод формулы для расчета величины пучения основан на предположении, что увеличение объема грунта происходит вследствие увеличения объема порового вещества за счет перехода воды в лед. И расширение объема происходит по высоте (по направлению к дневной поверхности грунта) без возможности бокового расширения, как это принимается в задаче о компрессионном уплотнении грунтов [7].

Построение разностной сетки по пространственной координате означает разбиение всей рассматриваемой толщины грунта на отдельные слои. В результате пучения слои мерзлой области перемещаются в направлении к поверхности грунта и границы между слоями (сеточные линии) займут новое положение. Поэтому в случае возникновения пучения переходим к другой сетке с новыми шагами  $h_i^*$ . Для вывода формулы, по которой рассчитывается новый шаг сетки, возьмем элементарный объем грунта  $V$  с площадью основания  $P$  и высотой  $h$ . Условие возникновения пучения определяется соотношением  $V_1 + V_2 > V_n$ , где  $V_1, V_2$  – объемы воды и льда соответственно. Величину суммарного объема влаги, равную объему пор, назовем порогом пучения  $V^* = V_1^* + V_2^* = V_n$ .

Приращение объема влаги за порогом пучения в рассматриваемом объеме выразится следующим образом:

$$\Delta V_{вл} = V_{вл} - V^* = V_1 + V_2 - V_n.$$

Разделив обе части на  $V_c$  – объем твердых частиц (скелета), получим

$$\frac{\Delta V_{вл}}{V_c} = \frac{V_1}{V_c} + \frac{V_2}{V_c} - \frac{V_n}{V_c} = \mathcal{G} + \eta - m,$$

$m$  – пористость материала;  $\mathcal{G}, \eta$  – объемные влажности по жидкой и твердой фазам влаги. С другой стороны,

$$\frac{\Delta V_{вл}}{V_c} = \frac{Ph_i^* - Ph_i}{V_c},$$

$Ph_i = V$  – объем взятого элемента, который состоит из суммы объемов твердых частиц и порового пространства  $V = V_c + V_n$ . Разделив на  $V_c$  обе части и заменив  $V$  на  $Ph_i$ , получаем:

$$V_c = \frac{Ph_i}{1 + m}.$$

Тогда из предыдущего равенства следует:

$$\frac{\Delta V_{вл}}{V_c} = \left( \frac{h_i^*}{h_i} - 1 \right) (1 + m),$$

и, приравнявая два полученных выражения для  $\Delta V_{вл} / V_c$ , приходим к равенству

$$\left( \frac{h_i^*}{h_i} - 1 \right) (1 + m) = \mathcal{G} + \eta - m.$$

Отсюда следует формула для расчета нового шага сетки:

$$h_i^* = h_i \frac{1 + \mathcal{G} + \eta}{1 + m}. \quad (15)$$

Величина пучения всей области на текущем шаге расчета определится как разность между начальными узлами новой и старой сеток  $x_0^* - x_0$ , которые лежат на поверхности грунта. При построении новой сетки ее последний узел, совпадающий с нижней границей области, считается неподвижным.

Условие возникновения пучения удобно представить в виде

$$\mathcal{G} + \eta > m. \quad (16)$$

Исходя из изложенного, алгоритм определения морозного пучения грунтов можно сформулировать в следующем виде.

1. На каждом временном шаге решается температурно-влажностная задача.

2. Вычисляются  $\mathcal{G}_i, \eta_i$  по найденным в первом пункте функциям  $W, W_2$ :

$$\mathcal{G} = \frac{\rho}{\rho_1} W, T \geq T_*, \quad \mathcal{G} = \frac{\rho}{\rho_1} W_1, T \leq T_*,$$

$$\eta = \frac{\rho}{\rho_2} W_2, T \leq T_*.$$

где  $\rho, \rho_1, \rho_2$  – плотности сухого грунта, воды и льда соответственно.

3. Проверяется условие (16) во всех узлах сетки. Если оно не выполнено, переходим к следующему временному шагу и возвращаемся к пункту 1. Если имеет место условие (16), то переходим к следующему пункту.

4. По формуле (15) вычисляются шаги новой сетки и определяется величина пучения как расстояние начального узла новой сетки от первоначальной дневной поверхности грунта.

5. Переходим к следующему временному шагу и повторяем пункты 1–4.

**Примеры численных исследований.**

Проведены расчеты по описанному алгоритму, где рассматривается массив грунта длиной  $l = 3$  м в течение 720 ч. Необходимые в расчетах исходные данные взяты из [7, 8, 9].

Значения  $\lambda$  при различных степенях влагонасыщенности  $q$  вычислены по формулам из [6]:

$$\lambda_1 = 1.38 + 1.05q, \quad \lambda_2 = 1.32 + 1.05q.$$

Пористость определяется по плотностям сухой супеси  $\rho = 1770$  кг/м<sup>3</sup> и его скелета  $\rho_c = 2650$  кг/м<sup>3</sup>:

$$m = 1 - \rho / \rho_c = 0.33.$$

Максимальная влагоемкость:

$$W_{\max} = m\rho_1/\rho = 0.186.$$

Начальная влажность находится по формуле

$$W = qW_{\max}.$$

Найденные ее значения помещены во втором столбце *таблицы*. Удельная теплоемкость скелета супеси принята равной

$$C_c = 0.959 \text{ кДж/кг} \cdot \text{град}.$$

Коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунтов выбраны функциями температуры и влажности:

$$k_1 = k_2 \exp(-0.23W_2),$$

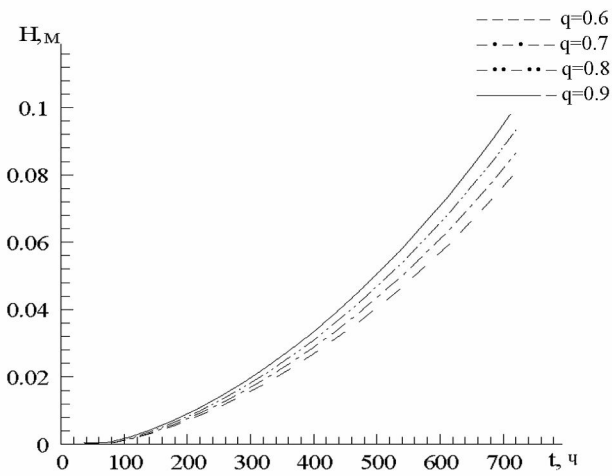
$$k_2 = 1.4 \cdot 10^{-7} \exp(0.172W)(1 + 0.04T).$$

Рассмотрим на примере супеси влияние начальной влажности на величину пучения. Пусть нижняя граница влагонепроницаема и теплоизолирована, температура среды  $T_c = -15^\circ \text{C}$ . Из результатов расчета, представленного на *рис. 1*, следует, что увеличение начальной влажности грунта приводит к росту величины пучения.

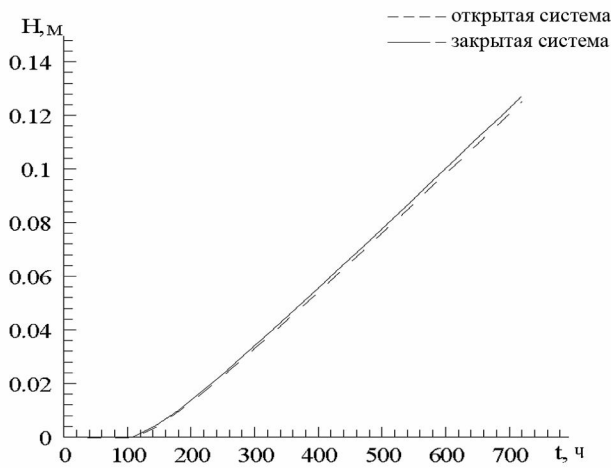
Изучены также закономерности пучения в случае, когда на подошве сезонноталого слоя имеются надмерзлотные воды, т.е. на нижней границе области задается постоянная влажность, равная полной влагоемкости. Результаты расчетов показывают возрастание величины и скорости пучения (*рис. 2*) по сравнению со случаем, когда есть подток влаги на этой границе.

Данные по теплопроводности талой и мерзлой супеси (кДж/м·час·град)

Степень влагонасыщенности $q$	Начальная весовая влажность	$\lambda$ талой супеси	$\lambda$ мерзлой супеси
0,6	0,1116	8,171	8,422
0,7	0,1302	8,426	8,862
0,8	0,1488	9,05	9,302
0,9	0,1674	9,45	9,742



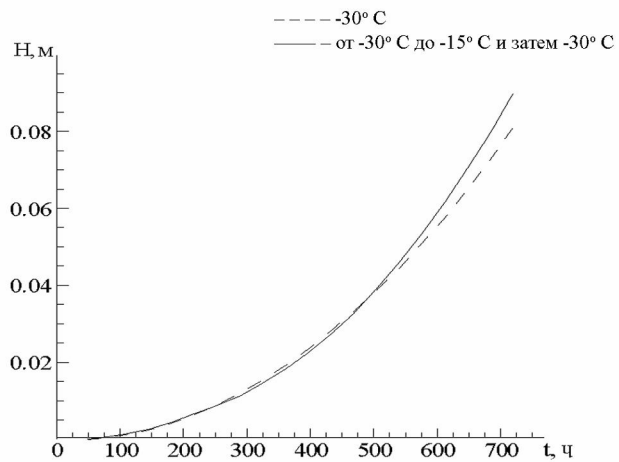
**Рис. 1.** Развитие пучения во времени при различных степенях влагонасыщенности  $q$  и  $T_c = -15^\circ C$



**Рис. 2.** Развитие пучения во времени при степени влагонасыщенности  $q = 0.6$  и  $T_c = -7^\circ C$

Известно [6], что немонотонный характер изменения температуры поверхности грунта вызывает неравномерное льдообразование внутри слоя зимнего промерзания. Для исследования влияния указанного фактора в данной

работе выполнены расчеты, когда температура окружающей среды в процессе промерзания изменяется от  $-30^\circ C$  до  $-15^\circ C$  и затем опять становится равной  $-30^\circ C$ , т.е. происходит некоторое потепление в процессе промерзания. Из результатов расчета (рис. 3) видно, что в случае промерзания с потеплением пучение грунтов превышает его величины при постоянной температуре окружающей среды.



**Рис. 3.** Развитие пучения во времени при степени влагонасыщенности  $q = 0.9$

Приведенные в работе результаты решения некоторых типичных задач промерзания сезонных грунтов показывают, что разработанная методика численного исследования процесса промерзания грунтов дает достаточно удовлетворительный прогноз динамики температурного и влажностного полей, а также возникающего при этом пучения. Она дает возможность в достаточно близкой к реальным условиям постановке вскрыть основные закономерности формирования криогенных текстур и величины пучения.

**Список литературы**

1. *Киселев М.Ф.* Предупреждение деформации грунтов от морозного пучения. Л., 1985.
2. *Кудрявцев С.А.* Численное моделирование процесса промерзания, морозного пучения и оттаивания грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2004. № 5. С. 21–26.
3. *Лыков А.В.* Явление переноса в капиллярно-пористых телах. М., 1954.
4. *Иванов Н.С.* Тепло- и массоперенос в мерзлых горных породах. М., 1969.
5. *Павлов А.Р.* Итерационная разностная схема для задачи тепломассопереноса при промерзании грунтов / А.Р. Павлов, М.В. Матвеева // Вестник Самарского государственного университета. Серия естественнонаучная. 2007. № 6(56). С. 242–252.
6. *Цытович Н.А.* Механика грунтов. М., 1979.
7. *Иванов Н.С.* Теплофизические свойства мерзлых горных пород / Н.С. Иванов, Р.Н. Гаврильев. М., 1965.
8. *Степанов А.В.* Теплофизические свойства дисперсных материалов / А.В. Степанов, А.М. Тимофеев. Якутск, 1994.
9. *Гарагуля Л.С.* Основы мерзлотного прогноза при инженерно-геологических исследованиях. М., 1974.

*Pavlov Alexey, Matveeva Maya*

**NUMERICAL MODELING OF FROST HEAVE DYNAMICS**

The algorithm for numerical research on the temperature-humidity conditions and soil heaving during freezing is proposed. Regularities in the influence of the key parameters determining soil heaving are studied.

Рецензент – *Матвеев В.И.*, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Поморского государственного университета имени М.В. Ломоносова