

УДК 519.62:536.2

ПАВЛОВ Алексей Романович, доктор технических наук, профессор кафедры математического анализа Института математики и информатики Якутского государственного университета имени М.К. Аммосова. Почетный работник высшего профессионального образования РФ. Автор 65 научных работ, в т.ч. монографии, трех учебно-методических пособий

МАТВЕЕВА Майя Васильевна, аспирант кафедры математического анализа Института математики и информатики Якутского государственного университета имени М.К. Аммосова. Автор 14 научных публикаций

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МОРОЗНОГО ПУЧЕНИЯ ГРУНТА*

Предлагается алгоритм численного исследования температурно-влажностного режима и пучения грунтов в процессе промерзания. Изучены закономерности влияния основных параметров, определяющих морозное пучение.

Система уравнений теплопереноса, промерзание грунта, пучение грунта

Одной из основных причин морозного пучения является увеличение объема грунта при промерзании в результате перехода воды в лед и миграции влаги к фронту промерзания [1]. Количественная оценка этих процессов аналитическими методами затруднена из-за нелинейности определяющих уравнений [2]. Расчетный метод определения морозного пучения влажных грунтов основан на исследовании совместного тепло-влажностного переноса при промерзании. В настоящей работе исследование температурно-влажностного режима грунтов с учетом фазовых превращений поровой влаги в процессе их промерзания выполнено на математической модели теплопереноса [3, 4] в случае, когда не учитываются количество тепла, переносимое миграционным потоком влаги, и термоградиентный механизм переноса влаги.

Постановка задачи о промерзании. Температурная задача в одномерном случае, когда пространственная координата x направлена от дневной поверхности грунта внутрь массива, состоит из следующих уравнений:

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad T > T_*, \quad \xi(t) < x < l, \quad (1)$$

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + L \rho \frac{\partial W_2}{\partial t}, \quad T < T_*, \quad 0 < x < \xi(t). \quad (2)$$

На границе раздела фаз имеет место условие типа Стефана:

$$\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} = L \rho [W_* - W_1(T_*)] \frac{d\xi}{dt}, \quad T = T_*, \quad x = \xi(t). \quad (3)$$

* Работа частично поддержана грантом имени академика В.П. Ларионова для молодых ученых, специалистов и студентов по физико-техническим наукам РС(Я) (№07-05/28 от 22.01.2008).

На дневной поверхности грунта задано условие теплообмена по закону Ньютона:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T - T_c), \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (4)$$

а на нижней границе области – отсутствие теплового потока:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = l, \quad t > 0. \quad (5)$$

Температура по толщине грунта удовлетворяет следующему начальному условию:

$$T(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (6)$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция.

В уравнениях (1–6) приняты следующие обозначения: T – температура; W – влажность в талой зоне; W_1, W_2 – влажности по жидкой и твердой фазам в мерзлой зоне соответственно; T_* – температура фазового перехода; c_1, ρ_1, λ_1 – соответственно удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности талой зоны; c_2, ρ_2, λ_2 – те же величины в мерзлой зоне; ρ – плотность скелета (сухого) материала; L – удельная теплота кристаллизации воды (плавления льда); $W_* = W(T_*)$ – значения влажности на фронте со стороны талой зоны; $W_1(T_*)$ – такая же величина со стороны мерзлой зоны; α – коэффициент теплопередачи, T_c – температура окружающей среды; $x = \xi(t)$ – уравнение фронта фазового перехода.

Влажностная задача ставится с учетом миграции влаги, как в талой, так и мерзлой областях:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \xi(t) < x < l, \quad T > T_*, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_2 \frac{\partial W_1}{\partial x} \right), \quad 0 < x < \xi(t), \quad T < T_*. \quad (8)$$

Уравнение баланса массы на фазовой границе можно записать в виде

$$k_2 \frac{\partial W_1}{\partial x} - k_1 \frac{\partial W}{\partial x} = W_2(T_*) \frac{d\xi}{dt}. \quad (9)$$

Граничные условия влажности записываются в зависимости от фазового состояния границы. В талом состоянии всей границы грунта задаются условия:

$$k_1 \frac{\partial W}{\partial x} = \alpha_*(W - \psi), \quad x = 0, \quad T > T_*, \quad (10)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x = l, \quad T > T_*. \quad (11)$$

Для мерзлых границ указанные условия принимают следующий вид:

$$k_2 \frac{\partial W_1}{\partial x} = \alpha_*(W_1 - \psi), \quad x = 0, \quad T \leq T_*, \quad (12)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = 0, \quad x = l, \quad T \leq T_*. \quad (13)$$

Начальное распределение влаги во всей области известно:

$$W(x, 0) = \varphi_*(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (14)$$

В уравнениях (7–14) приняты следующие обозначения: $W_1(T)$ – известная функция, выражающая количество незамерзшей воды при температуре T ; $W_2(T)$ – льдосодержание (количество льда); $\bar{W} = W_1 + W_2$ – суммарная влажность в мерзлой зоне; W – влажность в талой зоне; $\psi(x)$ – равновесная с окружающей средой влажность материала; α_* – коэффициент влагообмена; k_1, k_2 – коэффициенты диффузии влаги соответственно в талой и мерзлой зонах; $W_2(T_*) = W_* - W_1(T_*)$ – свободная влага (вода), которая замерзает скачком на фронте фазового перехода.

Уравнениями (1–14) полностью описываются температурное и влажностное поля при выбранных граничных условиях. Разработанный алгоритм численного решения указанной задачи подробно изложен в работе [5].

Алгоритм определения морозного пучения. Морозное пучение является результатом увеличения объема поровой воды при ее переходе в лед. В процессе промерзания происходит перераспределение влаги путем ее миграции, которое при определенных условиях может привести к пучению и образованию внутри промерзшего слоя прослоек льда различной мощности.

В настоящей работе предлагается методика численного моделирования морозного пучения грунтов, основанная на результатах численного решения задачи тепловлагодиффузии в промерзающих грунтах. Методика позволяет проследить за динамикой полей температуры, влажности и пучения в процессе промерзания.

Вывод формулы для расчета величины пучения основан на предположении, что увеличение объема грунта происходит вследствие увеличения объема порового вещества за счет перехода воды в лед. И расширение объема происходит по высоте (по направлению к дневной поверхности грунта) без возможности бокового расширения, как это принимается в задаче о компрессионном уплотнении грунтов [7].

Построение разностной сетки по пространственной координате означает разбиение всей рассматриваемой толщины грунта на отдельные слои. В результате пучения слои мерзлой области перемещаются в направлении к поверхности грунта и границы между слоями (сеточные линии) займут новое положение. Поэтому в случае возникновения пучения переходим к другой сетке с новыми шагами h_i^* . Для вывода формулы, по которой рассчитывается новый шаг сетки, возьмем элементарный объем грунта V с площадью основания P и высотой h . Условие возникновения пучения определяется соотношением $V_1 + V_2 > V_n$, где V_1, V_2 – объемы воды и льда соответственно. Величину суммарного объема влаги, равную объему пор, назовем порогом пучения $V^* = V_1^* + V_2^* = V_n$.

Приращение объема влаги за порогом пучения в рассматриваемом объеме выразится следующим образом:

$$\Delta V_{вл} = V_{вл} - V^* = V_1 + V_2 - V_n.$$

Разделив обе части на V_c – объем твердых частиц (скелета), получим

$$\frac{\Delta V_{вл}}{V_c} = \frac{V_1}{V_c} + \frac{V_2}{V_c} - \frac{V_n}{V_c} = \vartheta + \eta - m,$$

m – пористость материала; ϑ, η – объемные влажности по жидкой и твердой фазам влаги. С другой стороны,

$$\frac{\Delta V_{вл}}{V_c} = \frac{Ph_i^* - Ph_i}{V_c},$$

$Ph_i = V$ – объем взятого элемента, который состоит из суммы объемов твердых частиц и порового пространства $V = V_c + V_n$. Разделив на V_c обе части и заменив V на Ph_i , получаем:

$$V_c = \frac{Ph_i}{1 + m}.$$

Тогда из предыдущего равенства следует:

$$\frac{\Delta V_{вл}}{V_c} = \left(\frac{h_i^*}{h_i} - 1 \right) (1 + m),$$

и, приравнявая два полученных выражения для $\Delta V_{вл} / V_c$, приходим к равенству

$$\left(\frac{h_i^*}{h_i} - 1 \right) (1 + m) = \vartheta + \eta - m.$$

Отсюда следует формула для расчета нового шага сетки:

$$h_i^* = h_i \frac{1 + \vartheta + \eta}{1 + m}. \quad (15)$$

Величина пучения всей области на текущем шаге расчета определится как разность между начальными узлами новой и старой сеток $x_0^* - x_0$, которые лежат на поверхности грунта. При построении новой сетки ее последний узел, совпадающий с нижней границей области, считается неподвижным.

Условие возникновения пучения удобно представить в виде

$$\vartheta + \eta > m. \quad (16)$$

Исходя из изложенного, алгоритм определения морозного пучения грунтов можно сформулировать в следующем виде.

1. На каждом временном шаге решается температурно-влажностная задача.

2. Вычисляются ϑ_i, η_i по найденным в первом пункте функциям W, W_2 :

$$\vartheta = \frac{\rho}{\rho_1} W, T \geq T_*, \quad \vartheta = \frac{\rho}{\rho_1} W_1, T \leq T_*,$$

$$\eta = \frac{\rho}{\rho_2} W_2, T \leq T_*.$$

где ρ, ρ_1, ρ_2 – плотности сухого грунта, воды и льда соответственно.

3. Проверяется условие (16) во всех узлах сетки. Если оно не выполнено, переходим к следующему временному шагу и возвращаемся к пункту 1. Если имеет место условие (16), то переходим к следующему пункту.

4. По формуле (15) вычисляются шаги новой сетки и определяется величина пучения как расстояние начального узла новой сетки от первоначальной дневной поверхности грунта.

5. Переходим к следующему временному шагу и повторяем пункты 1–4.

Примеры численных исследований.

Проведены расчеты по описанному алгоритму, где рассматривается массив грунта длиной $l = 3$ м в течение 720 ч. Необходимые в расчетах исходные данные взяты из [7, 8, 9].

Значения λ при различных степенях влагонасыщенности q вычислены по формулам из [6]:

$$\lambda_1 = 1.38 + 1.05q, \quad \lambda_2 = 1.32 + 1.05q.$$

Пористость определяется по плотностям сухой супеси $\rho = 1770 \text{ кг/м}^3$ и его скелета $\rho_c = 2650 \text{ кг/м}^3$:

$$m = 1 - \rho / \rho_c = 0.33.$$

Максимальная влагоемкость:

$$W_{\max} = m\rho_1/\rho = 0.186.$$

Начальная влажность находится по формуле

$$W = qW_{\max}.$$

Найденные ее значения помещены во втором столбце *таблицы*. Удельная теплоемкость скелета супеси принята равной

$$C_c = 0.959 \text{ кДж/кг} \cdot \text{град}.$$

Коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунтов выбраны функциями температуры и влажности:

$$k_1 = k_2 \exp(-0.23W_2),$$

$$k_2 = 1.4 \cdot 10^{-7} \exp(0.172W)(1 + 0.04T).$$

Рассмотрим на примере супеси влияние начальной влажности на величину пучения. Пусть нижняя граница влагонепроницаема и теплоизолирована, температура среды $T_c = -15^\circ \text{C}$. Из результатов расчета, представленного на *рис. 1*, следует, что увеличение начальной влажности грунта приводит к росту величины пучения.

Изучены также закономерности пучения в случае, когда на подошве сезонноталого слоя имеются надмерзлотные воды, т.е. на нижней границе области задается постоянная влажность, равная полной влагоемкости. Результаты расчетов показывают возрастание величины и скорости пучения (*рис. 2*) по сравнению со случаем, когда есть подток влаги на этой границе.

Данные по теплопроводности талой и мерзлой супеси (кДж/м·час·град)

Степень влагонасыщенности q	Начальная весовая влажность	λ талой супеси	λ мерзлой супеси
0,6	0,1116	8,171	8,422
0,7	0,1302	8,426	8,862
0,8	0,1488	9,05	9,302
0,9	0,1674	9,45	9,742

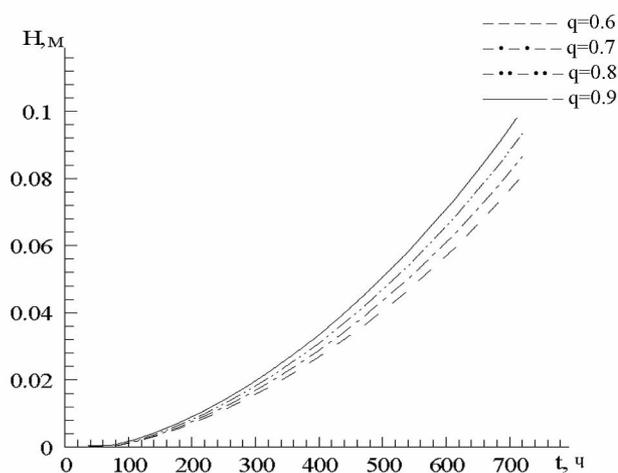


Рис. 1. Развитие пучения во времени при различных степенях влагонасыщенности q и $T_c = -15^\circ C$

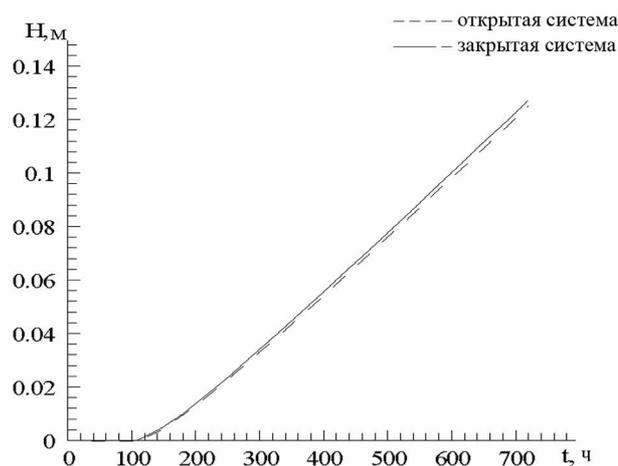


Рис. 2. Развитие пучения во времени при степени влагонасыщенности $q = 0.6$ и $T_c = -7^\circ C$

Известно [6], что немонотонный характер изменения температуры поверхности грунта вызывает неравномерное льдообразование внутри слоя зимнего промерзания. Для исследования влияния указанного фактора в данной

работе выполнены расчеты, когда температура окружающей среды в процессе промерзания изменяется от $-30^\circ C$ до $-15^\circ C$ и затем опять становится равной $-30^\circ C$, т.е. происходит некоторое потепление в процессе промерзания. Из результатов расчета (рис. 3) видно, что в случае промерзания с потеплением пучение грунтов превышает его величины при постоянной температуре окружающей среды.

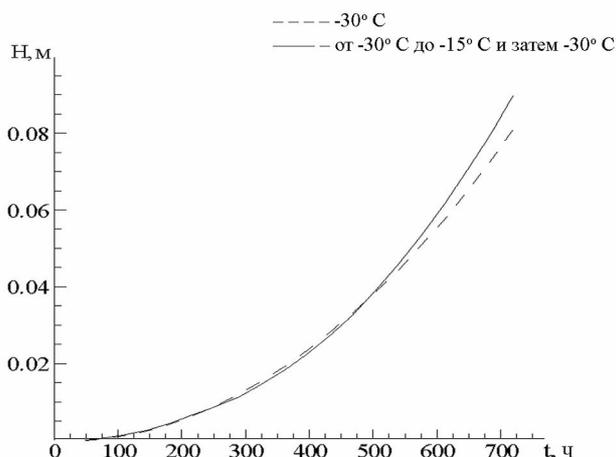


Рис. 3. Развитие пучения во времени при степени влагонасыщенности $q = 0.9$

Приведенные в работе результаты решения некоторых типичных задач промерзания сезонных грунтов показывают, что разработанная методика численного исследования процесса промерзания грунтов дает достаточно удовлетворительный прогноз динамики температурного и влажностного полей, а также возникающего при этом пучения. Она дает возможность в достаточно близкой к реальным условиям постановке вскрыть основные закономерности формирования криогенных текстур и величины пучения.

Список литературы

1. *Киселев М.Ф.* Предупреждение деформации грунтов от морозного пучения. Л., 1985.
2. *Кудрявцев С.А.* Численное моделирование процесса промерзания, морозного пучения и оттаивания грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2004. № 5. С. 21–26.
3. *Лыков А.В.* Явление переноса в капиллярно-пористых телах. М., 1954.
4. *Иванов Н.С.* Тепло- и массоперенос в мерзлых горных породах. М., 1969.
5. *Павлов А.Р.* Итерационная разностная схема для задачи тепломассопереноса при промерзании грунтов / А.Р. Павлов, М.В. Матвеева // Вестник Самарского государственного университета. Серия естественнонаучная. 2007. № 6(56). С. 242–252.
6. *Цытович Н.А.* Механика грунтов. М., 1979.
7. *Иванов Н.С.* Теплофизические свойства мерзлых горных пород / Н.С. Иванов, Р.Н. Гаврильев. М., 1965.
8. *Степанов А.В.* Теплофизические свойства дисперсных материалов / А.В. Степанов, А.М. Тимофеев. Якутск, 1994.
9. *Гарагуля Л.С.* Основы мерзлотного прогноза при инженерно-геологических исследованиях. М., 1974.

Pavlov Alexey, Matveeva Maya

NUMERICAL MODELING OF FROST HEAVE DYNAMICS

The algorithm for numerical research on the temperature-humidity conditions and soil heaving during freezing is proposed. Regularities in the influence of the key parameters determining soil heaving are studied.

Рецензент – *Матвеев В.И.*, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики Поморского государственного университета имени М.В. Ломоносова